

项目编号: T010PRP41013

上海交通大学

本科生研究计划 (PRP) 研究论文  
(第 41 期)

论文题目: 考虑根部不确定接触状态的航空发动机叶片固有振动分析  
——柔性叶片固有振动分析

项目负责人: 李志敏 学院(系): 船舶海洋与建筑工程学院

指导教师: 李志敏 学院(系): 船舶海洋与建筑工程学院

参与学生: 顾恩霖

项目执行时间: 2022 年 2 月 至 2023 年 2 月



# 考虑根部不确定接触状态的航空发动机叶片固有振动分析

## 柔性叶片固有振动分析

### 摘要

航空发动机叶片是飞机的核心部件之一。因此，发动机叶片振动情况的研究是航空发动机研究的重要方向。然而，由于安装时小空隙、安装根部的柔性等原因，发动机叶片在轮盘上的固定方式存在不确定接触状态。研究这一动力学问题的工具有里兹法与有限元方法。本项目中，我们先从力学平衡与能量法两个角度，复现了薄板的静力学与动力学问题方程的推导，同时讨论了边界条件。并通过变分法的推导，验证了能量法与力学平衡之间，数学上的等价性。为了求解该问题，引入 Rayleigh-Ritz 法，并着重讨论了里兹法中展开阶次的不同、形函数的选取对里兹法求解的重要性。得出里兹法的求解并不是展开阶次越多越好、且里兹法难以在复杂问题中运用的结论。并由此转向有限元方法。在有限元部分中，使用矩形单元，进行了刚度阵与质量阵的积分计算，并编写 MATLAB 程序，完成了薄板的静力学平衡与自由振动固有频率、模态的求解。

**关键词：** 旋转叶片动力学；叶片振动；有限元；里兹法

# Natural Vibration Analysis for Aeroengine Blade with Uncertain Fastening: Natural Frequency Analysis for Compliant Blades

## ABSTRACT

The aero-engine blade is one of the core components of the aircraft. Therefore, the study of engine blade vibration condition is an important direction of aero-engine research. However, there is an uncertain contact condition in the way the engine blade is fixed on the wheel disc due to the small gap in the installation, the flexibility of the installation root, etc. The tools to study this dynamics problem are the Ritz method and the finite element method. In this project, we first reproduce the derivation of the equations for the static and dynamical problem of the thin plate from both the mechanical equilibrium and energy method perspectives, as well as discussing the boundary conditions. The mathematical equivalence between the energy method and the mechanical equilibrium is also verified by the derivation of the variational method. In order to solve the problem, the Rayleigh-Ritz method is introduced, and the importance of the different orders of expansion in the Ritz method and the selection of the form function for the solution of the Ritz method is focused on. It is concluded that the solution of the Ritz method is not as good as the number of expansion orders, and the Ritz method is difficult to be applied in complex problems. This leads to a shift to the finite element method. In the finite element part, the integration of the stiffness and mass arrays is carried out using rectangular cells, and a MATLAB program is written to solve the static equilibrium and free vibration inherent frequencies and modes of the thin plate.

**Key Words:** Rotating Object Dynamics; Blade Vibration; Finite Element Analysis; Rayleigh-Ritz Method

## 目 录

<b>第一章 绪论.....</b>	<b>1</b>
1.1 航空发动机叶片及其根部不确定性.....	1
1.2 动力学分析及有限元分析发展现状.....	1
<b>第二章 薄板的动力学方程推导.....</b>	<b>3</b>
2.1 薄板动力学方程的力学推导.....	3
2.1.1 薄板静力平衡方程 .....	3
2.1.2 薄板的动力学方程与振动固有频率.....	5
2.2 薄板动力学方程的能量法（变分法） .....	6
2.2.1 薄板势能方程的推导.....	6
2.2.2 能量方程推导与力学平衡推导的等价性.....	7
2.3 薄板动力学方程的边界条件.....	8
<b>第三章 薄板动力学方程的 Rayleigh-Ritz 法 .....</b>	<b>10</b>
3.1 薄板弯曲的 Rayleigh-Ritz 法基本原理 .....	10
3.2 形函数的选取.....	11
3.3 对展开阶次的讨论.....	11
3.4 Rayleigh-Ritz 法在振动上的应用：求解固有频率 .....	12
3.5 Rayleigh-Ritz 法在复杂问题中的局限性 .....	15
<b>第四章 薄板的有限元分析.....</b>	<b>16</b>
4.1 矩形单元有限元分析的数学推导.....	16
4.1.1 单个矩形单元的节点分析.....	16
4.1.2 矩形单元的刚度矩阵.....	18
4.1.3 矩形单元的质量矩阵与振动问题.....	18
4.2 有限元求解薄板问题.....	19
<b>第五章 结论.....</b>	<b>21</b>
5.1 总结 .....	21
5.2 不足与展望 .....	22
<b>参考文献.....</b>	<b>23</b>
<b>致谢 .....</b>	<b>24</b>
<b>附录 A.....</b>	<b>25</b>
A.1 矩形板静力学问题-里兹法 .....	25
A.2 矩形板振动问题-里兹法 .....	27
A.3 矩形板静力学与振动问题-有限元法.....	29



## 第一章 绪论

### 1.1 航空发动机叶片及其根部不确定性

发动机叶片振动情况的研究是航空发动机研究的重要方向之一。作为飞机的核心部件之一，航空发动机叶片承载着发动机中能量转化的任务，其安全性、可靠性对于航空运输的过程安全具有至关重要的作用<sup>[1]</sup>。航空发动机叶片如图 1-1 所示，其根部通过一个榫头榫槽结构固定于轮盘上。然而，这种固定方式存在不确定接触状态。根部不确定性指航空发动机叶片由于安装时小空隙、安装根部的柔性等原因，导致根部状况难以确定。由于航空发动机叶片根部具有不确定性，在飞行过程中会导致振动。振动会导致发动机叶片出现疲劳、失效等问题<sup>[2]</sup>，严重影响发动机工作性能、降低飞机使用寿命，进而影响飞行安全。因此，研究航空发动机的振动特性十分必要。



图1-1 航空发动机压气机叶片

目前航空发动机叶片研究主要集中于对工艺<sup>[3]</sup>、高周疲劳<sup>[4]</sup>、摩擦<sup>[5]</sup>等因素对航空发动机叶片的影响。由于航空发动机叶片工作情况非常复杂，考虑因素很多，很难选取一个比较好的角度进行分析，故鲜有其纯动力学方向的研究。

本项目主要研究航空发动机叶片的固有频率问题。将会推导出薄板弹性体的力学方程，分析里兹法与有限元法在弹性体问题中的，并分析矩形板和发动机叶片（扭转的矩形板）的弯曲与振动。

### 1.2 动力学分析及有限元分析发展现状

从古代开始，人们就开始对材料的动力学性质进行研究，但是材料力学作为一门独立的学科是在 19 世纪才开始发展的。19 世纪初期，静力学成为材料力学的主要分支。随着对静力学的研究深入，人们开始关注动力学，即材料在外部载荷下的响应。在 19 世纪后半期，应用力学开始成为材料力学的一个独立分支。应用力学的主要目标是研究材料的应用行为，包括设计和优化材料的结构以满足特定需求<sup>[7]</sup>。

薄板理论最早是由柯西、泊松和黎曼等数学家在 19 世纪中期发展出来的。

后来，基尔霍夫引入了三大假设并获得了描述薄弹性板在外部载荷下弯曲和振动的方程，所以也被称作基尔霍夫薄板理论<sup>[6]</sup>。然而，直到 20 世纪，这些方程才被用于分析实际的工程问题。其中，里兹法是在有限元未出现时的一个方程重要的研究板壳形变的方法。

有限元的出现时间更晚。有限元分析是指，将一个复杂的结构分解为多个小区域、然后对每个小区域进行分析，最终得到整个结构的行为和性能的计算方法。常常用于解决复杂工程问题的计算。20 世界中叶，应用数学、计算力学、计算机科学蓬勃发展、相互影响，助长了有限元方法的诞生：20 世纪 50 年代美国工程师 Richard Courant 提出了有限元方法的基本概念，随后，Galerkin 和 Ray W. Clough 等人也对这种方法进行了深入的研究和发展<sup>[8]</sup>。现在，有限元分析的方法应用广泛。从二维到三维<sup>[9]</sup>、从线性到非线性<sup>[10]</sup>，有限元在各个领域大展拳脚<sup>[11][12]</sup>。商业有限元软件的出现更是让有限元分析的应用更加便捷<sup>[13]</sup>。

本文将使用力学分析中的里兹法和有限元法研究航空发动机叶片问题。

## 第二章 薄板的动力学方程推导

### 2.1 薄板动力学方程的力学推导

#### 2.1.1 薄板静力平衡方程

力学中对薄板的定义是,长宽尺寸大于厚度的 15 倍时,即可看作是薄板模型。我们对薄板这一模型有如下假设:

- (1) 板的材料由各向同性弹性材料组成;
- (2) 振动时薄板的挠度远小于它的厚度;
- (3) 自由面上的应力为零;

(4) 薄板在上下表面之间存在一个对称平面,成为中面。原来与中面正交的横截面在变形后始终保持正交,即薄板在变形前中面的法线在变形后仍为中面的法线。

为了建立应力、应变和位移之间的关系,取空间直角坐标  $Oxyz$ ,且坐标原点及  $xOy$  坐标面皆放在板变形前的中面位置上,如图 2-1 所示。设板上任意一点 a 的位置,将由变形前的坐标  $x$ 、 $y$ 、 $z$  来确定。

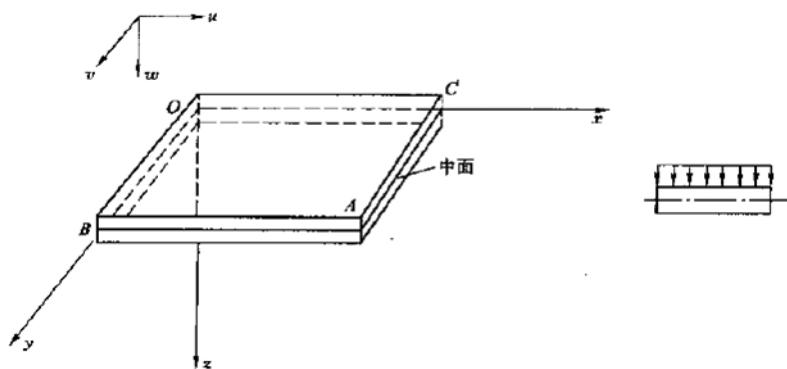


图2-1 薄板的坐标系建立

其中,薄板任意一点 a 变形后的位移:  $x$  方向上的移动称为  $u$ ,  $y$  方向上的移动称为  $v$ ,  $z$  方向上的移动称为  $w$ 。

某一微元处的变形(用变形后的长度、角度比上变形前的对应量)在力学中称为应变。相对应的,某一点处的微元的力称为应力。

根据假定(2),板的横向变形和面内变形  $u$ 、 $v$  是相互独立的。为此,其弯曲变形可由中面上各点的横向位移  $w(x, y, t)$  所决定。根据假定(4),剪切应变分量为零。由薄板经典理论,可以求得板上任意一点  $a(x, y, z)$  沿  $x, y, z$  三个方向的位移分量  $u_a, v_a, w_a$  的表达式分别为:

$$u_a = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v_a = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2-1)$$

根据应变与位移的几何关系可以求出各点的三个主要是应变分量为：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_a}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2-2)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_a}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2-3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_a}{\partial y} + \frac{\partial v_a}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2-4)$$

由胡克定律（即应力和应变的正比关系）得，

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2-5)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2-6)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2-7)$$

作受力分析如图所示。图 2-2 所示中  $M_x, M_{xy}, Q_x, M_y, M_{yx}, Q_y$  分别为  $OB$  面、 $OC$  面上所受到的单位长度的弯矩、扭矩和横切剪力。弯矩和扭矩都用沿其轴的双剪头表示。 $M_x, M_y$  是由正应力  $\sigma_x, \sigma_y$  引起的合力矩。扭矩是由剪切力  $\tau_{xy}$  引起的合力矩。

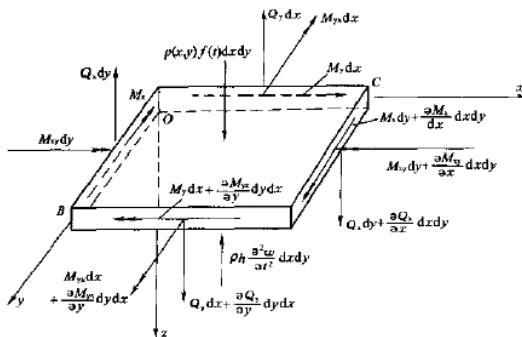


图2-2 薄板压力的受力分析

设外部的载荷集度（即外力情况）为：

$$q(x, y, t) = P(x, y)f(t) \quad (2-8)$$

由于是纯弯曲问题，故有：

$$\sum F_z = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_y = 0 \quad (2-9)$$

则由  $\sum F_z = 0$  得

$$Q_x dy + \frac{\partial Q_y}{\partial x} dy dx - Q_x dy + Q_y dx$$

$$+\frac{\partial Q_x}{\partial y} dydx - Q_y dx + P(x, y)f(t)dydx - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dydx = 0 \quad (2-10)$$

由  $\sum M_x = 0$  得：

$$\begin{aligned} & M_y dx - \left( M_y dx + \frac{\partial M_y}{\partial y} dydx \right) \\ & + Q_y dx \cdot \frac{1}{2} dy \left( Q_y dx + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dydx \right) M_{xy} dy - \left( M_{xy} dy + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dydx \right) = 0 \end{aligned} \quad (2-11)$$

由  $\sum M_y = 0$  得：

$$\begin{aligned} & \left( M_x dy + \frac{\partial M_x}{\partial x} dxdy \right) - M_x dy + \left( M_{yx} dx + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dxdy \right) \\ & - M_{yx} dx - \left( Q_x dy + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dxdy \right) \cdot \frac{1}{2} dx - Q_x dy \cdot \frac{1}{2} dx = 0 \end{aligned} \quad (2-12)$$

三个式子整理得：

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P(x, t)f(t) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2-13)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_x}{\partial y} = Q_y \quad (2-14)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = Q_x \quad (2-15)$$

其中，记  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  弯矩的计算公式为：

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2-16)$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2-17)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2-18)$$

回代得薄板弯曲的微分方程为：

$$D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(x, y)f(t) \quad (2-19)$$

若外载荷不随时间变化：

$$q(x, y) = D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \quad (2-20)$$

记作：

$$D\nabla^4 w = D\Delta\Delta w = q \quad (2-21)$$

可见，薄板弯曲的方程是一个四阶的调和方程。

## 2.1.2 薄板的动力学方程与振动固有频率

由以上推导得，薄板静力学方程为：

$$D\Delta\Delta w = q \quad (2-22)$$

由 D'Alembert 原理, 其动力学方程可以表征为静力学方程加惯性力的形式:

$$D\Delta\Delta w = q - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2-23)$$

由于板的静力稳定位置  $w_e$  (即平衡位置) 与时间无关, 可以将方程改写为:

$$D\Delta\Delta(w_t - w_e) = -m \frac{\partial^2(w_t - w_e)}{\partial t^2} \quad (2-24)$$

取  $w_v = w_t - w_e$ , 即可得到薄板自由振动的微分方程:

$$D\Delta\Delta w_v + m \frac{\partial^2 w_v}{\partial t^2} = 0 \quad (2-25)$$

## 2.2 薄板动力学方程的能量法 (变分法)

对于调和方程, 可以用变分原理求解。对满足定解问题  $D\Delta\Delta w = q$  解  $w$ , 必然满足:

$$\forall v \in \nu_0, E_{min}(v) = E(w) \quad (2-26)$$

其中,  $E$  为微分方程对应的变分函数。

由此, 我们用变分法重新研究一下薄板问题。

### 2.2.1 薄板势能方程的推导

三维弹性体的弹性势能遵循如下公式:

$$dU = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} \quad (2-27)$$

对于薄板模型, 去掉无关项, 有:

$$U = \int \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \tau_{xy} d\gamma_{xy} \quad (2-28)$$

由于:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_a}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2-29)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_a}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2-30)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_a}{\partial y} + \frac{\partial v_a}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2-31)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) = -\frac{EZ}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2-32)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) = -\frac{EZ}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2-33)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = -\frac{EZ}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2-34)$$

则势能方程:

$$U = \frac{D}{2} \iint \left[ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu)(w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2) \right] dx dy - \iint q w dx dy \quad (2-35)$$

由变分法的基本原理：

$$\exists w_o, U(w_o) = \min(U(w)) \quad (2-36)$$

其中， $w_o$ 即为薄板问题的解。

在固体力学中把变分法这一，将变分函数（即势能方程）取最小值的原理，称作“势能最小原理”。

### 2.2.2 能量方程推导与力学平衡推导的等价性

数学上的变分，其物理意义往往是能量方程。然而在推导的过程中可以发现，势能方程与之前的数学物理方程的导出是独立的。那么能量方程是不是与原来的方程等价呢？

为了研究这个问题，我查找了对变分法进行介绍的专栏，学习了一些变分法和偏微分方程关系的知识，以及对这个问题的讨论。最后的结果是，能量方程就是变分法中要最小化的那个函数，这个最小化和微分方程是等价的。

在此以薄板弯曲方程为例，展示变分法以能量作为变分函数的合理性。

对能量方程作变分：

$$\begin{aligned} \delta U &= D \iint \nabla^2 w \nabla^2 \delta w - (1-\nu) (w_{xx} \delta w_{yy} + \delta w_{xx} w_{yy} - 2 \delta w_{xy} w_{xy}) dx dy - \iint q \delta w dx dy \\ &= D \iint \left[ \nu (w_{xx} \delta w_{yy} + \delta w_{xx} w_{yy} - 2 \delta w_{xy} w_{xy}) + w_{xx} \delta w_{xx} + w_{yy} \delta w_{yy} - 2 \delta w_{xy} w_{xy} \right] dx dy - \iint q \delta w dx dy \end{aligned} \quad (2-37)$$

由格林公式，

$$\begin{aligned} \iint w_{xx} \delta w_{yy} dx dy &= \iint w_{xxyy} \delta w dx dy + \int w_{xx} \delta w_n \sin^2 a ds \\ &\quad - \int \left( \frac{\partial}{\partial s} (w_{xx} \sin a \cos a) + w_{xxy} \cos a \right) \delta w dx dy \end{aligned} \quad (2-38)$$

$$\begin{aligned} \iint w_{yy} \delta w_{xx} dx dy &= \iint w_{xxyy} \delta w dx dy + \int w_{yy} \delta w_n \cos^2 a ds ? \\ &\quad + \int \left( \frac{\partial}{\partial s} (w_{yy} \sin a \cos a) - w_{xxy} \cos a \right) \delta w dx dy \end{aligned} \quad (2-39)$$

$$\begin{aligned} \iint w_{xx} \delta w_{xx} dx dy &= \iint w_{xxxx} \delta w dx dy + \int w_{xx} \delta w_n \cos^2 a ds ? \\ &\quad + \int \left( \frac{\partial}{\partial s} (w_{xx} \sin a \cos a) - w_{xxx} \cos a \right) \delta w dx dy \end{aligned} \quad (2-40)$$

$$\begin{aligned} \iint w_{yy} \delta w_{yy} dx dy &= \iint w_{yyyy} \delta w dx dy + \int w_{yy} \delta w_n \sin^2 a ds ? \\ &\quad - \int \left( \frac{\partial}{\partial s} (w_{yy} \sin a \cos a) + w_{yyy} \cos a \right) \delta w dx dy \end{aligned} \quad (2-41)$$

$$\begin{aligned} \iint w_{xy} \delta w_{xy} dx dy &= \iint w_{xxyy} \delta w dx dy + 2 \int w_{xy} \delta w_n \sin a \cos a ds ? \\ &\quad + \int \left( \frac{\partial}{\partial s} w_{xy} (\sin^2 a - \cos^2 a) - w_{xxy} \cos a - w_{xyy} \sin a \right) \delta w dx dy \end{aligned} \quad (2-42)$$

整合得  $\delta U = \iint (D\Delta\Delta w - q) \delta w dx dy = 0$ , 则有

$$D\Delta\Delta w = q \quad (2-43)$$

由此可见, 势能方程与原来的数学物理方程等价。

### 2.3 薄板动力学方程的边界条件

在静力学问题中的边界条件一般分为三种情况:

第一种为自由边界条件, 即此边界上没有任何限制。

第二种为简支边界条件, 在这里, 限制了薄板周边的位置, 即:

$$w|_F = 0 \text{ (非齐次的不为 0)} \quad (2-44)$$

第三种为固支边界条件, 这里不仅限制了薄板周边的位置, 也限制了薄板的位形 (即边界的角度也控制好了), 写成如下表达形式:

$$w|_F = 0; \frac{\partial}{\partial x^i} w|_F = 0 \text{ (非齐次的不为 0)} \quad (2-45)$$

这三种边界情况可以根据实际需要任意组合。从现实来看, 不论那种边界条件, 都存在唯一的解; 而从数学上看, 不同的边界条件会引出不同解的情况:

倘有函数满足:

$$\Delta\Delta w = 0 \quad (2-46)$$

使用分离变量法, 设  $w = X(x)Y(y)$ ; 则带入方程有:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{\left(\frac{Y^{(4)}}{Y}\right)'}{2\left(\frac{Y''}{Y}\right)} = -a^2 \quad (2-47)$$

$a=0$  时, 显然  $X$  为一次多项式  $X = kx + b$ , 此时  $Y = a_i y^i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ 。带入边界条件可以求得系数。而在  $a$  不为 0 时:

求解  $X$ :

$$X'' + a^2 X = 0 \quad (2-48)$$

$$X = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax \quad (2-49)$$

求解  $Y$ :

$$Y^{(4)} - 2a^2 Y'' + a^4 Y = 0 \quad (2-50)$$

$$Y = d_1 \cosh ay + d_2 \sinh ay + d_3 a y \cosh ay + d_4 a y \sinh ay \quad (2-51)$$

这里求得的  $w$ , 加上薄板弯曲问题的某一特解  $w_0$ , 所得的解  $w'$  也是微分方程的解。

可以知道, 为了得出正确的解, 需要加入新的限制条件。一般地, 会把外力矩作为限制条件: 根据实际工程问题, 外力矩限制, 可以避免出现不正确的解。比如, 简支边界条件如果不加力矩限制, 则有无穷多解。而其中, 只有一个解满足无外力矩作用。



上海交通大学  
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

上海交通大学第 41 期 PRP 学生研究论文

---

## 第三章 薄板动力学方程的 Rayleigh-Ritz 法

### 3.1 薄板弯曲的 Rayleigh-Ritz 法基本原理

薄板弯曲难以求解析解，所以退而寻找近似解。使用广泛的一种是 Rayleigh-Ritz 法。它的思路十分类似于常微分方程中学过的级数解法。

于是我们可以开始我们的求解过程。采用 Einstein 求和约定，设形函数为：

$$w = a_i w_i \quad (3-1)$$

每一个基函数  $w_i$  均满足边界条件。

所以势能函数可以表示为：

$$\Pi = F(a_i; x) \quad (3-2)$$

由变分法的基本原理（即固体力学中的“势能最小原理”），即对微分方程对应的变分方程，其变分值最小，有：

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial a_i} \delta a_i = 0 \quad (3-3)$$

所以可以得出，变分法需要得到最小值的条件为：

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_i} = 0, \forall i \quad (3-4)$$

又由于之前的推导势能函数满足：

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{D}{2} a_i \int \left[ \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \right] \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \\ & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} dx dy \cdot a_j - \int q w_i dx dy a_i \\ &= \frac{D}{2} a_i \int \left[ \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} \right] dx dy \cdot a_j - \int q w_i dx dy a_i \end{aligned} \quad (3-5)$$

由势能最小原理，有：

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = D \int \left[ \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} \right. \\ \left. + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} \right] dx dy \cdot a_j - \int q w_i dx dy \quad (3-6)$$

记系数矩阵为  $\mathbf{a}$ , 改写为矩阵形式为:

$$K\mathbf{a} = F \quad (3-7)$$

其中, 各分项系数为

$$\mathbf{K}_{ij} = D \int \left[ \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} \right. \\ \left. + 2(1-\mu) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (3-8)$$

$$\mathbf{F}_i = \int q w_i dx dy \quad (3-9)$$

由此可以求出系数矩阵  $\mathbf{a}$ 。

### 3.2 形函数的选取

在里兹法中, 最核心的步骤就是选取形函数  $w = a_i w_i$ 。选取函数的恰当与否直接决定了运算结果是否准确。选取形函数的基本原则是, 形函数的基底必须满足边界条件, 之后代入方程中求取各个基底函数的系数为何值时才可以满足形函数。先前部分已经阐述过, 形函数满足边界条件不仅与其函数本身与导数有关, 也要保证其对应的结构外力矩, 因此, 形函数很难选取恰当。一般有如下选取方式:

对于简支边界, 一般选取相应方向的形函数为正弦函数、或其它三角函数组合的形式;

对于固支边界, 一般选取相应方向的形函数为二次及以上的多项式函数;

举例来说便是, 倘若一块矩形板在  $x = a, x = 0$  处是简支, 在  $y = b, y = 0$  处是固支, 则形函数可以设置成:

$$w_{mnp} = x^{m+1} (b-x)^{n+1} \sin \frac{p\pi}{b} y \quad (3-10)$$

### 3.3 对展开阶次的讨论

可以看出, 展开的阶次不同, 所得到的近似解的结果也不同。这里稍微研究一下展开阶次对结果的影响。使用 MATLAB 编写程序, 进行 Rayleigh-Ritz 法的求解, 具体代码见附录。

对于, 板设定为长宽 1m, 厚 1cm, 均布载荷 1kPa, 铁板 (杨氏模量 200GPa,

泊松比 0.3, 密度  $7800\text{kg/m}^3$ ), 以有限元分析结果为依据的参考值, 其有限元分析结果为, 最大形变处挠度为  $69.23\mu\text{m}$ 。代码运行的结果如下图所示:

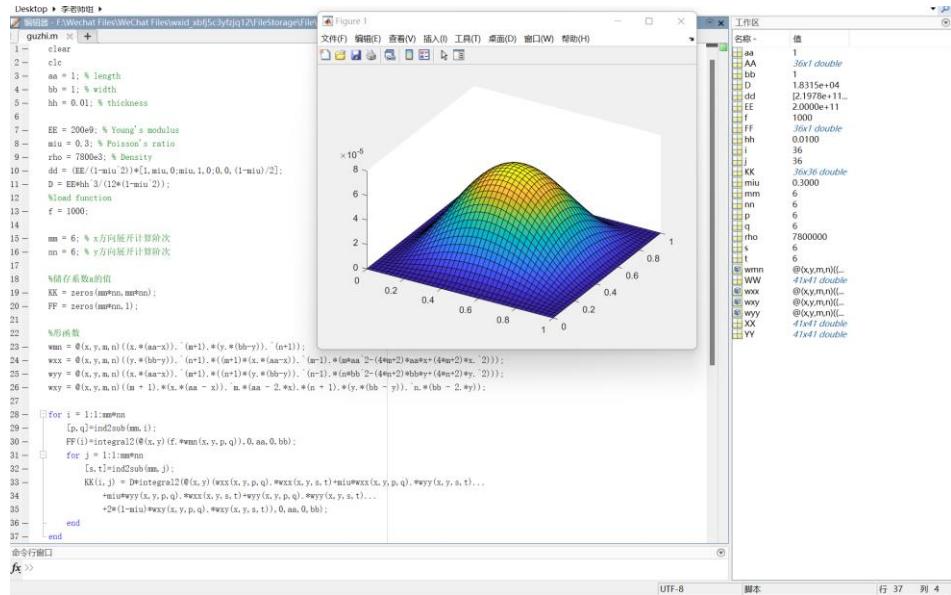


图3-1 基于Ritz法的MATLAB仿真

以上是  $6 \times 6$  阶展开的结果，最大挠度处  $69.086\mu\text{m}$ 。

表3-1 不同展开阶数的结果 (单位: $\mu\text{m}$ )

参考 值	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
69.23	72.57	69.04	69.084	69.082	69.083	69.086	69.808	54.134	72.123

在  $9 \times 9$  展开的时候，计算结果会严重失真。

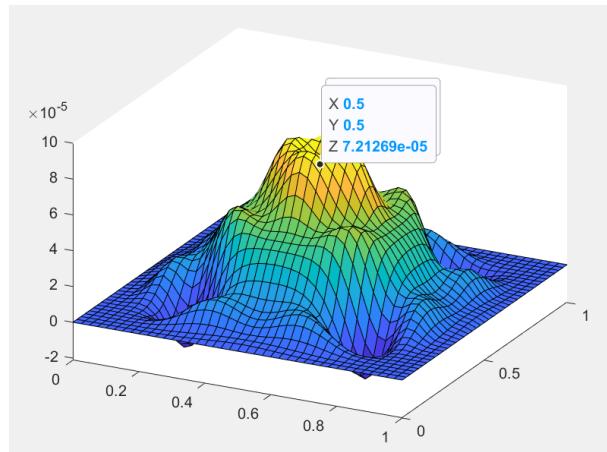


图3-2 9×9展开的MATLAB仿真结果

可以看出，展开的阶数不是越大越好。在某一个展开阶数的时候，对解的近似效果是最好的。在本例子中， $6 \times 6$  阶就是这个最好的阶数。

### 3.4 Rayleigh-Ritz 法在振动上的应用：求解固有频率

基于 Ritz 法,假定板材位移为:

$$W = \sum_{m=1,n=1}^{M,N} a_{mn} w_{mn}(x,y) = \sum_k^{M+N} a_k w_k(x,y) = w_k a_k \quad (3-11)$$

将二维序列映射到一维序列(按一定规律对二维序列展开排列):(m,n)→k(后面表达式省去了求和符号)。

对应应变:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} a_k \quad (3-12)$$

对应应力:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3-13)$$

弹性势能为:

$$U = \int \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon} = \int \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} a_i \int \left[ \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \right] \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} dx dy \cdot a_j \quad (3-14)$$

动能:

$$T = \int \frac{1}{2} \rho \dot{W}^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \rho \int \dot{a}_i w_i w_j \dot{a}_j dx dy dz = \frac{1}{2} \rho h \dot{a}_i \int w_i w_j dx dy \dot{a}_j \quad (3-15)$$

基于拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial T}{\partial a} = -\frac{\partial U}{\partial a} \quad (3-16)$$

即有,

$$\rho h \int w_i w_j dx dy \ddot{a}_j = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \int \left[ \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \right] \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} dx dy a_j \quad (3-17)$$

改写为矩阵形式即为,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3-18)$$

其中，刚度矩阵  $\mathbf{K}$  与质量矩阵  $\mathbf{M}$  的分项分别为

$$\mathbf{M}_{ij} = \rho h \int w_i w_j dx dy \quad (3-19)$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \int \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \\ & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} dx dy \quad (3-20)$$

固有频率可通过求解以下广义特征值问题得到：

$$\mathbf{KV} = \mathbf{MV}\Lambda \quad (3-21)$$

其中， $\Lambda$  为广义特征值对角矩阵， $\mathbf{V}$  为其所对应的广义特征向量矩阵。

将以上推导编写为 MATLAB 程序，取不同情况运行求结果：

取形函数为正弦函数，对一块  $1 \times 1$  的正方形的四边简支薄板求解固有频率及振动模态：

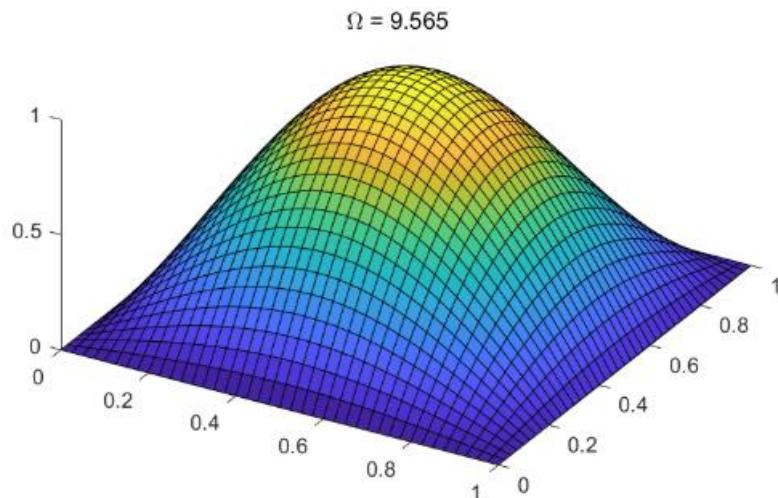


图3-3 四边简支板的一阶模态振型和模态频率

同样的，若是  $2 \times 1$  的矩形薄板，其振动模态为：

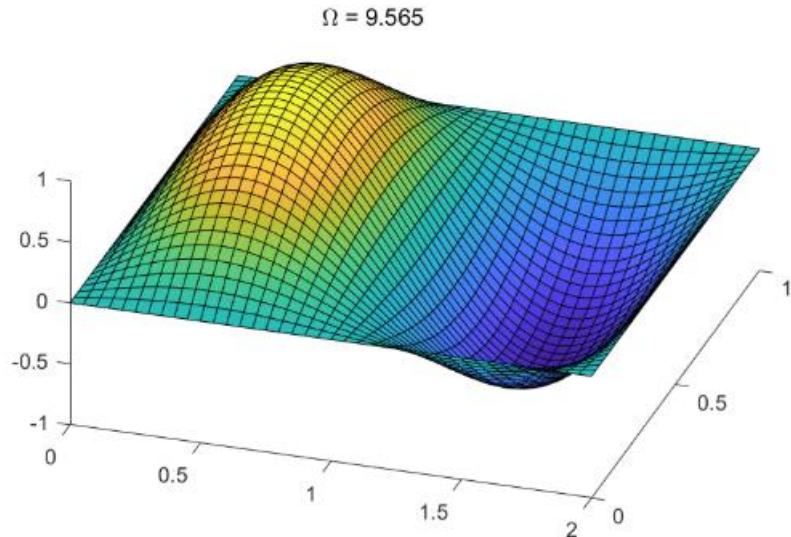


图3.4 四边简支板的二阶模态振型和模态频率

### 3.5 Rayleigh-Ritz 法在复杂问题中的局限性

由以上讨论可知，里兹法在解决各向同性矩形板的动力学问题时十分好用。然而，在复杂问题中，里兹法却很难进行求解。

对于具有复杂边界条件的薄板，由于之前阐述过，形函数的选择非常依赖边界条件，所以在复杂边界条件下（比如弹性支承等），符合边界上力矩平衡的形函数选取非常麻烦。特别的，复杂边界条件诸如弹性边界条件，其边界刚度固定、但力矩一直在变，选取合适的形函数非常难，更别提变刚度等更为复杂的情形。事实上，在简单矩形板的动力学问题中，形函数的选取往往是依靠经验与直觉。

而对于具有复杂形状的薄板，比如复杂平面图形，寻找到在其边界上满足简支与固支的函数就已经十分困难；对于变厚度、薄壳结构等，推导不同，就更无法使用里兹法了。

## 第四章 薄板的有限元分析

由于上一章末尾阐述了里兹法的局限性，故我们需要一种新的方法来进行薄板动力学问题的求解。所以，我们采用较为常用的有限元方法。本项目中，使用矩形单元进行有限元分析。

### 4.1 矩形单元有限元分析的数学推导

#### 4.1.1 单个矩形单元的节点分析

矩形单元的有限元方法顾名思义，将复杂形状的薄板、薄壳等离散成一个个微小的带节点的矩形单元：

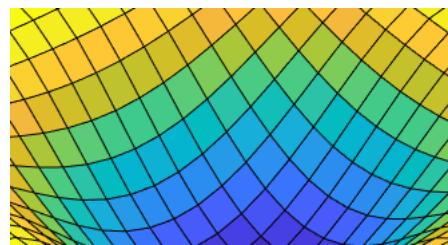


图4-1 薄板仿真的有限元网格

基于矩形单元的有限元方法与 Ritz 法相似；矩形单元有限元依旧探求应力、应变与位移的关系，平衡方程、几何方程与物理方程与第二章推导过程中的也一致。

一个平面四节点矩形单元如图 4-2 所示，节点的坐标表示为  $(\xi_i, \eta_i)$ 。

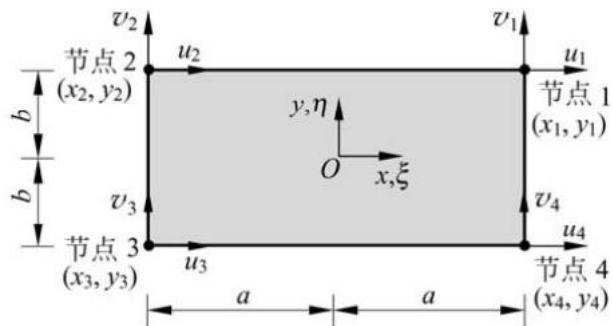


图4-2 薄壳矩形单元节点坐标

在薄板的纯弯曲和振动问题中，产生的刚性位移就只有沿  $Z$  方向的平动以及绕  $x$  和  $y$  轴的转动，而不存在  $z$  轴方向的旋转。整个薄板的位移完全由平面在  $z$  方向的挠度  $w$  所决定，而中面各点，在  $x$  和  $y$  方向不产生位移。所以，每个节点有三个自由度与之对应，可以表征为：

$$\delta_i = \begin{pmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{pmatrix} \quad (4-1)$$

离散后记每个单元的长度为  $x$ , 宽度为  $y$ , 且设:

$$w = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2 + a_7\xi^3 + a_8\xi^2\eta + a_9\xi\eta^2 + a_{10}\eta^3 + a_{11}\xi^3\eta + a_{12}\xi\eta^3 \quad (4-2)$$

则有:

$$\delta_i = \begin{pmatrix} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{pmatrix} \quad (4-3)$$

将式(4-2)带入式(4-3), 可得

$$\delta_i = \mathbf{A}_i \mathbf{a}_i \quad (4-4)$$

则对于一个有四个已知结点的矩形板,

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix} = (\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2 \quad \mathbf{A}_3 \quad \mathbf{A}_4) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{pmatrix} \quad (4-5)$$

4 个节点列出 12 维线性方程组, 求解得出系数  $\{\mathbf{a}_i\}$ 。

于是将系数回代, 挠度  $w$  可以用各节点坐标表示, 得如下形式:

$$w = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta} \quad (4-6)$$

其中,

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_1^T \ \delta_2^T \ \delta_3^T \ \delta_4^T]^T \quad (4-7)$$

$$\mathbf{N} = [N^1 \ N^2 \ N^3 \ N^4] \quad (4-8)$$

$$\mathbf{N}^i = [N_i \ N_{xi} \ N_{yi}] \quad (4-9)$$

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(\xi_i\xi + \eta_i\eta + 2 - \xi^2 - \eta^2) \quad (4-10)$$

$$N_{xi} = -\frac{b}{8}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 - \eta^2)\eta_i \quad (4-11)$$

$$N_{yi} = \frac{a}{8}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 - \xi^2)\xi_i \quad (4-12)$$

板内各点的应变完全由挠度  $w$  的三个二阶导数所决定。因此, 如果要得到一个协调的单元, 还要求在单元的交界面上有斜率的连续性:

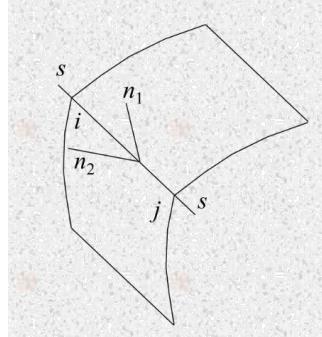


图4-3 相邻单元的位移协调

对如图所示的边界，在相邻的两个矩形单元中，均可以表示为：

$$w|_{\eta=c} = c_1 + c_2\xi + c_3\xi^2 + c_4\xi^3 \quad (4-13)$$

对边界上端点  $i, j$ ，其  $\xi$  不同，但  $w, \theta$  均已知，故在两个单元中可以确定每个系数  $c$  的值，而且两个单元中的  $c$  相同。而一个单元更换坐标系的话， $c$  也会根据坐标系进行相应的变化，但最终也可以保证连续性条件满足。

#### 4.1.2 矩形单元的刚度矩阵

根据第二章中的挠度-应变关系，将节点应变用节点位移表示：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta} \quad (4-14)$$

其中

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}^1 \ \mathbf{B}^2 \ \mathbf{B}^3 \ \mathbf{B}^4] \quad (4-15)$$

$$\mathbf{B}^i = -z \begin{bmatrix} \frac{N_{i,\xi\xi}}{a^2} & \frac{N_{i,\eta\eta}}{b^2} & \frac{2N_{i,\xi\eta}}{ab} \end{bmatrix}^T \quad (4-16)$$

一个矩形单元的刚度矩阵为：

$$\mathbf{K} = [k_{ij}]_{4 \times 4} \quad (4-17)$$

其中，各子矩阵为：

$$k_{ij} = \int \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dV = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\xi d\eta dz \quad (4-18)$$

对节点位移，可得单元刚度方程：

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{P} \quad (4-19)$$

#### 4.1.3 矩形单元的质量矩阵与振动问题

与刚度阵类似，质量矩阵也是通过积分进行组装：

$$\mathbf{M} = \int \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (4-20)$$

对于一般系统，满足如下方程：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{P} \quad (4-21)$$

求取固有频率，即求解无阻尼自然频率，此时问题退化为：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{P} \quad (4-22)$$

简谐振动满足：

$$X = \hat{X}e^{i\omega t} \quad (4-23)$$

代入得：

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \hat{X} = \mathbf{0} \quad (4-24)$$

自由振动角频率满足：

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (4-25)$$

与里兹法部分中一样，这是个广义特征值问题。

## 4.2 有限元求解薄板问题

矩形板的尺寸、边界条件等采用与第三章里兹法中的相同。对该矩形板采用静力学分析，结果如下：

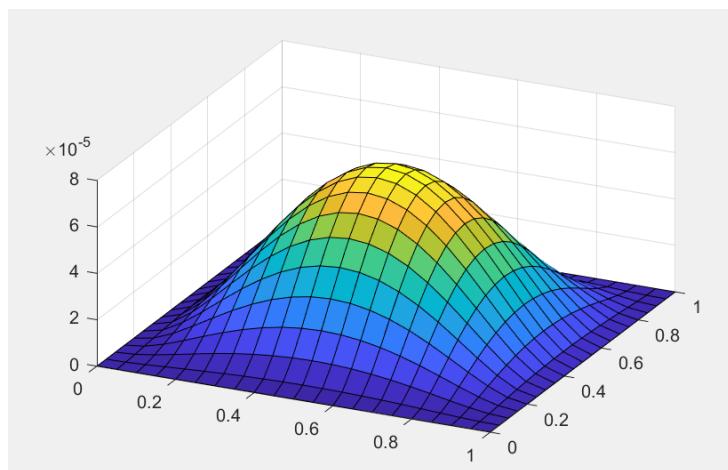


图4-4 基于有限元方法的四边简支板弯曲变形（稀疏网格）

对其静力分析增加网格：

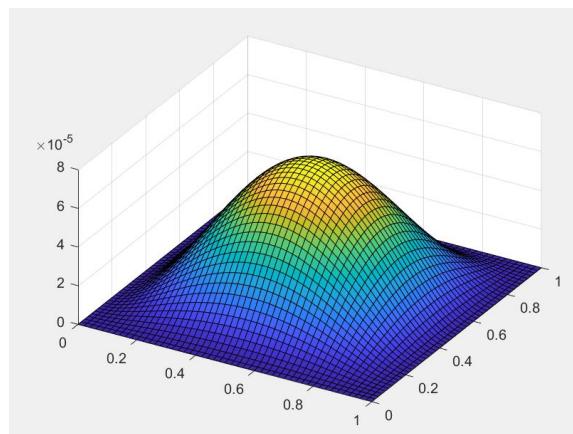


图4-5 基于有限元方法的四边简支板弯曲变形（加密网格）

其一阶振动模态阵型为：

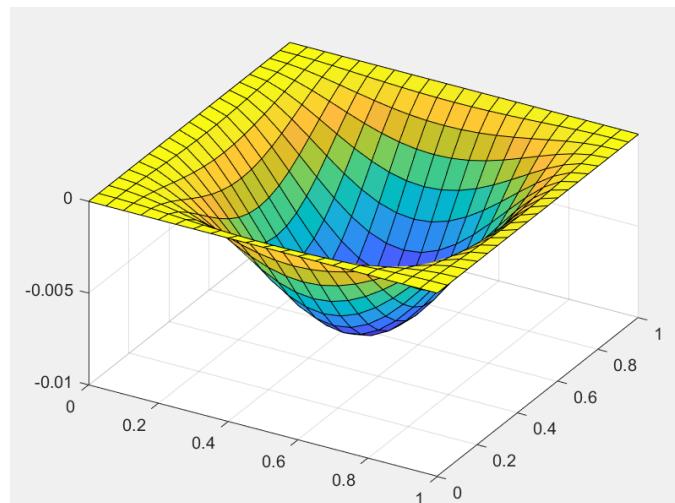


图4-6 基于有限元方法的四边简支板的一阶阵型

对于叶片，由于形状比较复杂，故使用商业有限元软件 ANSYS 进行分析：如图 4-7 所示一片发动机叶片，将其刚度设置为 200GPa；在根部（靠近的一侧）施加固支边界条件，对其它边界不施加约束，将载荷等效成最外侧的边上垂直于叶片平面的受力，大小设置成 10N/m，可以求得其弯曲问题的解。

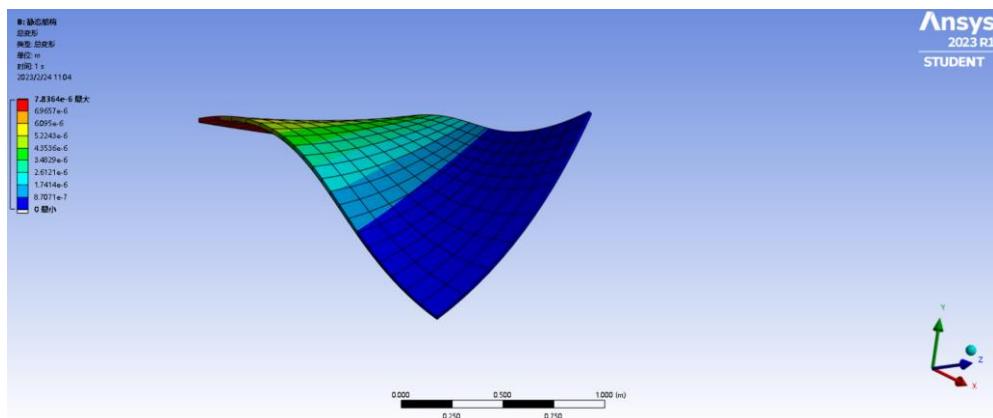


图4-7 扭转叶片的弯曲变形

## 第五章 结论

### 5.1 总结

本项目中，我们从力学平衡与能量法两个角度，复现了薄板的静力学与动力学问题方程的推导。并通过变分法的推导，验证了能量法与力学平衡之间，数学上的等价性。其静力学平衡方程与自由振动微分方程分别为：

$$D\Delta\Delta w = q \quad (5-1)$$

$$D\Delta\Delta w_v + m \frac{\partial^2 w_v}{\partial t^2} = 0 \quad (5-2)$$

对应的常用边界条件包括：

- (1) 自由边界条件，边界上没有任何限制。
- (2) 简支边界条件，限制了薄板周边的位置，即：

$$w|_F = 0 \text{ (非齐次的不为 0)} \quad (5-3)$$

- (3) 固支边界条件，同时限制了薄板周边的位置和薄板的位形，即：

$$w|_F = 0; \frac{\partial}{\partial x^i} w|_F = 0 \text{ (非齐次的不为 0)} \quad (5-4)$$

为了求解上述方程及边界问题，引入 Rayleigh-Ritz 法，并着重讨论了里兹法中展开阶次的不同、形函数的选取对里兹法求解的重要性。得出结论：里兹法的求解并不是展开阶次越多越好。形函数的选取一般为：对于简支边界条件使用正余弦函数，对于固支边界条件使用多项式的形式。此外，里兹法难以在复杂问题中运用。因此，我们采用有限元方法。

本项目复现了有限元的基本数学推导，得到了弹性体刚度阵、质量阵和静力学、动力学方程。

刚度阵为：

$$\mathbf{K} = [\mathbf{k}_{ij}]_{4 \times 4} \quad (5-5)$$

$$\mathbf{k}_{ij} = \int \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dV \quad (5-6)$$

静力学方程：

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{P} \quad (5-7)$$

质量矩阵：

$$\mathbf{M} = \int \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (5-8)$$

动力学方程：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{P} \quad (5-9)$$

自由振动方程:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{P} \quad (5-10)$$

固有频率求解方式:

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (5-11)$$

在完成了数学推导之后，编写 MATLAB 程序，完成了薄板的静力学平衡与自由振动固有频率、模态的求解。

## 5.2 不足与展望

本项目中的主要研究内容仍旧是围绕矩形单元薄板，对于形状复杂的。笔者未来需要加强数理与代码基础，尽力自己写出可以分析航空发动机叶片一类物体的 MATLAB 有限元程序。

另外，本项目中仅仅涉及到各向同性材料的问题。现如今很多材料都是复合材料，因此，此后考虑引入复合材料，进行复合材料情况下的静力学与动力学问题探究。

## 参考文献

- [1] 林杰威. 航空发动机叶片疲劳寿命和可靠性研究[D].天津大学,2009.
- [2] 李其汉,王延荣,王建军.航空发动机叶片高循环疲劳失效研究 [J].航空发动机,2003(04):16-18+41.
- [3] 徐正扬. 发动机叶片精密电解加工关键技术研究[D].南京航空航天大学,2008.
- [4] 李其汉,王延荣,王建军.航空发动机叶片高循环疲劳失效研究 [J].航空发动机,2003(04):16-18+41.
- [5] 刘书国,洪杰,陈萌.航空发动机叶片-机匣碰摩过程的数值模拟[J].航空动力学报,2011,26(06):1282-1288.DOI:10.13224/j.cnki.jasp.2011.06.019.
- [6] 板壳理论, 吴连元编著, 上海交通大学出版社, 1989, ISBN7-313-00478-8/P.3
- [7] 材料力学 (第 2 版), 李红云等编著, 机械工业出版社, 2020, ISBN978-7-111-48533-9.
- [8] 陈锡栋,杨婕,赵晓栋等.有限元法的发展现状及应用 [J].中国制造业信息化,2010,39(11):6-8+12.
- [9] 宁连旺.ANSYS 有限元分析理论与发展[J].山西科技,2008(04):65-66+68.
- [10] 李英民,韩军,刘立平.ANSYS 在砌体结构非线性有限元分析中的应用研究[J].重庆建筑大学学报,2006(05):90-96+105.
- [11] 张建峰,王翠玲,吴玉萍,顾明 .ANSYS 有限元分析软件在热分析中的应用 [J].冶金能源,2004(05):9-12.
- [12] 刘劲松,刘红军.ABAQUS 钢筋混凝土有限元分析[J].装备制造技术,2009(06):69-70+107.
- [13] 高兴军,赵恒华.大型通用有限元分析软件 ANSYS 简介[J].辽宁石油化工大学学报,2004(03):94-98.
- [14] 高等板壳理论, 韩强编著, 科学出版社, 2002, ISBN9787030100207.
- [15] 数学物理方程 (第三版), 谷超豪等编著, 高等教育出版社, 2012, ISBN 978-7-04-033791-4.
- [16] 有限元基础教程, 曾攀编著, 清华大学出版社, 2008.

## 致谢

非常感谢本项目的指导老师李志敏老师和刘涛老师。两位老师在项目进行过程中对我们关怀备至：在知识学习阶段给了我们详尽的指导与计划，有任何疑问都会耐心解答；每周与我们进行一次讨论，认真检查我们在公式推导、代码上是否有差错、是否有可以改进的地方；在项目之外，也非常热心关注我们的学业情况、并给了我们非常多很宝贵的建议。两位老师对我的科研经历与本科学习有着深远的影响。

我也很感激我同组的同学江志恒、张睿。他们和我一起学习相关知识，在我有疑问的时候愿意和我一起探讨、一起研究。也会帮我解决一些项目上的困难。平时也经常与我聊天，让我每天都过得很快乐。

感谢身边的家人与朋友在我项目进行时对我的关怀。

## 附录A

### A.1 矩形板静力学问题-里兹法

```

clear
clc
aa = 1; % length
bb = 1; % width
hh = 0.01; % thickness

EE = 200e9; % Young's modulus
miu = 0.3; % Poisson's ratio
rho = 7800e3; % Density
dd = (EE/(1-miu^2))*[1,miu,0;miu,1,0;0,0,(1-miu)/2];
D = EE*hh^3/(12*(1-miu^2));
%load function
f = 1000;

mm = 6; % x 方向展开计算阶次
nn = 6; % y 方向展开计算阶次

%储存系数 a 的值
KK = zeros(mm*nn,mm*nn);
FF = zeros(mm*nn,1);

%形函数
wmn = @(x,y,m,n)((x.*(aa-x)).^(m+1).*((y.*bb-y)).^(n+1));
wxx =
    @(x,y,m,n)((y.*bb-y)).^(n+1).*((m+1)*(x.*aa-x)).^(m-1).*((m*aa^2-(4*m+2)*aa*x+(4*m+2)*x.^2));
wyx =
    @(x,y,m,n)((x.*aa-x)).^(m+1).*((n+1)*(y.*bb-y)).^(n-1).*((n*bb^2-(4*n+2)*bb*y+(4*n+2)*y.^2));
wxy = @(x,y,m,n)((m + 1).*((x.*aa - x)).^m.*((aa - 2.*x).*(n + 1).*((y.*bb - y)).^n.*((bb - y)).^n));

for i = 1:1:mm*nn
    [p,q]=ind2sub(mm,i);
    FF(i)=integral2(@(x,y)(f.*wmn(x,y,p,q)),0,aa,0,bb);
end

```

```
for j = 1:1:mm*nn
    [s,t]=ind2sub(mm,j);
    KK(i,j) =
    D*integral2(@(x,y)(wxx(x,y,p,q).*wxx(x,y,s,t)+miu*wxx(x,y,p,q).*wyy(x,y,s,t)...
        +miu*wyy(x,y,p,q).*wxx(x,y,s,t)+wyy(x,y,p,q).*wyy(x,y,s,t)...
        +2*(1-miu)*wxy(x,y,p,q).*wxy(x,y,s,t)),0,aa,0,bb);
end
AA = KK\FF;

%绘图代码参照刘老师的
[XX,YY]=meshgrid(linspace(0,1,41)*aa,linspace(0,1,41)*bb);
WW=zeros(41,41);
for j=1:1:mm*nn
    [s,t]=ind2sub(mm,j);
    WW = WW + AA(j)*wmn(XX,YY,s,t);
end

figure(1)
clf,hold on
surf(XX,YY,WW)
grid on
view(30,45)
hold off
```

## A.2 矩形板振动问题-里兹法

```
%% 清空 workspace
```

```
clear
```

```
clc
```

```
%% 定义薄板几何尺寸和材料参数
```

```
aa = 2; % length
```

```
bb = 1; % width
```

```
hh = 0.01; % thickness
```

```
EE = 200e9; % Young's modulus
```

```
miu = 0.3; % Poisson's ratio
```

```
rho = 7800e3; % Density
```

```
mm = 6; % x 方向展开计算阶次
```

```
nn = 6; % y 方向展开计算阶次
```

```
kk = mm*nn; % 展开为一维式子后
```

```
%% 假定板材振动形函数(四边简支条件, 当然也可以替换成其他边界条件的形函数)
```

```
wmn = @(x,y,m,n)(sin(m*pi*x).*sin(n*pi*y));
```

```
wxx = @(x,y,m,n)(-(m*pi)^2*sin(m*pi*x).*sin(n*pi*y));
```

```
wyy = @(x,y,m,n)(-(n*pi)^2*sin(m*pi*x).*sin(n*pi*y));
```

```
wxy = @(x,y,m,n)(m*n*pi^2*cos(m*pi*x).*cos(n*pi*y));
```

```
%% 计算质量阵和刚度阵 (其实可以利用对称性, 减少一般的循环计算量, 当然完全矩阵化计算计算量会更小)
```

```
MM = zeros(kk,kk); % 初始化质量阵
```

```
KK = zeros(kk,kk); % 初始化刚度阵
```

```
II = rho*hh;
```

```
DD = (EE*hh^3)/(12*(1-miu^2))*[1,miu,0;miu,1,0;0,0,(1-miu)/2];
```

```
for ii=1:1:kk
```

```
    [p,q]=ind2sub(mm,ii);
```

```
    for jj=1:1:kk
```

```
        [s,t]=ind2sub(mm,jj);
```

```
MM(ii,jj)=MM(ii,jj)+integral2(@(x,y)(II*wmn(x,y,p,q).*wmn(x,y,s,t)),0,a
a,0,bb);
KK(ii,jj)=KK(ii,jj)+integral2(@(x,y)(...
    DD(1,1)*wxx(x,y,p,q).*wxx(x,y,s,t)...
    +DD(1,2)*wxx(x,y,p,q).*wy(x,y,s,t)...
    +DD(2,1)*wy(x,y,p,q).*wxx(x,y,s,t)...
    +DD(2,2)*wy(x,y,p,q).*wy(x,y,s,t)...
    +DD(3,3)*4*wxy(x,y,p,q).*wxy(x,y,s,t)),0,aa,0,bb);
end
end
```

```
%% 自由振动频率求解(只算了前六阶振动频率和模态)
[VV,dd] = eigs(KK,MM,6, 'smallestabs');
omega = sqrt(diag(dd));
```

```
%% 绘图部分
```

```
idx = 1;
[XX,YY]=meshgrid(linspace(0,1,41)*aa,linspace(0,1,41)*bb);
WW=zeros(41,41);
for ii=1:1:kk
    [p,q]=ind2sub(mm,ii);
    WW = WW + VV(ii,idx)*wmn(XX,YY,p,q);
end
```

```
figure(1)
clf,hold on
title(['\Omega = ',num2str(omega(idx))])
surf(XX,YY,WW)
view(30,45)
hold off
```

### A.3 矩形板静力学与振动问题-有限元法

```
clear;
```

```
clc;
```

```
%% 板的参数初始化
```

```
Lx=4; %长度 m
```

```
Ly=1; %宽度 m
```

```
hh=0.01; %厚度 m
```

```
EE=200e9; %杨氏模量 Pa
```

```
vv=0.3; %泊松比
```

```
rho=7800e3; %密度 kg/m^3
```

```
%% 网格单元信息
```

```
NNx=40; %长度方向单元个数
```

```
NNy=10; %宽度方向单元个数
```

```
La=Lx/NNx; %单元长度方向尺寸
```

```
Lb=Ly/NNy; %单元宽度方向尺寸
```

```
Nodenum=(NNx+1)*(NNy+1); %节点个数
```

```
%单元与对应节点序号
```

```
% 对于矩形板，从左下角向右，向上进行节点和单元编号进行排列
```

```
elenodeidx=zeros(NNx*NNy,5);
```

```
for jj=1:1:NNx
```

```
    for ii=1:1:NNy
```

```
        elenodeidx(NNx*(ii-1)+jj,1)=NNx*(ii-1)+jj;
```

```
        elenodeidx(NNx*(ii-1)+jj,2)=(NNx+1)*(ii-1)+jj;
```

```
        elenodeidx(NNx*(ii-1)+jj,3)=(NNx+1)*(ii-1)+jj+1;
```

```
        elenodeidx(NNx*(ii-1)+jj,4)=(NNx+1)*ii+jj+1;
```

```
        elenodeidx(NNx*(ii-1)+jj,5)=(NNx+1)*ii+jj;
```

```
    end
```

```
end
```

---

[ML,KL,FL]=elementMKFfune(EE,vv,rho,La,Lb,hh); %获得对应参数的质量阵和刚度阵

%% 边界条件

% %四边简支

```
% fxnode={1:1:(NNx+1),1,0;... %下端节点序号
%     (NNx+2):(NNx+1):((NNy-1)*(NNx+1)+1),1,0;... %左端节点序号
%     (NNy*(NNx+1)+1):1:(NNx+1)*(NNy+1),1,0;... %上端节点序号
%     2*(NNx+1):(NNx+1):NNy*(NNx+1),1,0};... %右端节点序号
```

% 四边固支

```
fxnode={1:1:(NNx+1),[1;2;3],[0;0;0];... %下端节点序号
        (NNx+2):(NNx+1):((NNy-1)*(NNx+1)+1),[1;2;3],[0;0;0];... %左端节点序号
        (NNy*(NNx+1)+1):1:(NNx+1)*(NNy+1),[1;2;3],[0;0;0];... %上端节点序号
        2*(NNx+1):(NNx+1):NNy*(NNx+1),[1;2;3],[0;0;0]};... %右端节点序号
```

% % 左端固支

```
% fxnode={1:(NNx+1):((NNy-1)*(NNx+1)+1),[1;2;3],[0;0;0]}; %左端节点序号
```

```
rmdof=cell(size(fxnode,1),1);
for ii=1:1:size(fxnode,1)
    rmdof{ii}=ele2node(fxnode{ii,1},fxnode{ii,2});
end
rmdof=cell2mat(rmdof);
kpdoft=setdiff((1:3*Nodenum).',rmdof);
```

%% 振动模态计算

```
KKL=full(stiffAsm(KL,elenodeidx,Nodenum)); %初始线刚度矩阵
```

```
MML=full(stiffAsm(ML,elenodeidx,Nodenum)); %初始线刚度矩阵
```

```
[VV,dd] =eigs(KKL(kpdoft,kpdoft),MML(kpdoft,kpdoft),10,'smallestabs');
```

```
omega=sqrt(diag(dd));
```

```
FFL=zeros(3*Nodenum,size(VV,2));
```

```
FFL(kpdoft,:)=VV;
```

%% 阵型绘图

```
[XX,YY]=meshgrid(0:Lx/NNx:Lx,0:Ly/NNy:Ly);
```

```
%%
```

```
ii=1;
```

```
UVU=reshape(FFL(:,ii),3,[]);
```

```
mww=(reshape(UVU(1,:),NNx+1,NNy+1)).';
```

```
mwx=(reshape(UVU(2,:),NNx+1,NNy+1)).';
```

```
mwy=(reshape(UVU(3,:),NNx+1,NNy+1)).';
```

```
figure(1)
```

```
clf,hold on
```

```
surface(XX,YY,mww);
```

```
grid on
```

```
view(30,45)
```

```
% axis equal
```

```
hold off
```

%% 均布载荷静态变形

```
FFL = 1000*forceAsm(FL,elenodeidx,Nodenum); %载荷列阵组集,10N/m^2
```

```
UUU = zeros(3*Nodenum,1);
```

```
UUU(kpdof) = KKL(kpdof,kpdof)\FFL(kpdof);
```

```
UUU=reshape(UUU,3,[]);
```

```
fww=(reshape(UUU(1,:),NNx+1,NNy+1)).';
```

```
figure(2)
```

```
clf,hold on
```

```
surface(XX,YY,fww);
```

```
grid on
```

```
view(30,45)
```

```
% axis equal
```

```
hold off
```